IUNIE 2023 –T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{2}{e^x}-1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2\left(e^x-1\right)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $m$ și $n$, știind că dreapta $d$ de ecuație $y=mx+n$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-3x\right)dx=15$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_2^5\frac{1}{f(x)-4x^3+3}dx=\frac{1}{3}\ln 2$.

**5p** **c)** Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x^3+f(x)}{x}$ este egal cu $2\pi f(3)$.

IUNIE (R) 2023 – T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\frac{2}{3}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^2\frac{4x}{f(x)}dx=2\ln 3$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$, știind că $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=f(n)-\frac{4}{e}$.

MAI 2023 – T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+6x^2-15x+9$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3\left(x^2+4x-5\right),\ x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{e^x f''(x)}=0$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-9,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{8x}{x+9}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)\,dx=4$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^6 \dfrac{1}{8x}\cdot f(x)\,dx=\ln\dfrac{3}{2}$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=6(4+a\pi)$.

MARTIE 2023– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1+\dfrac{8}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(1-x)\geq f(1+x)$, pentru orice $x\in(0,1)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+4x+2$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x)-4x\right)dx=12$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-3x^2-2\right)e^x\,dx=4$.

**5p** **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_{-1}^0 a\cdot f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^{a-1}dx=63$.

MODEL 2023– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x}=0$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă.

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=6$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=4$.

**5p** **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\pi\left(\dfrac{91}{3}+\ln 4\right)$.

AUGUST 2022– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+3$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-6)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{3f(x)-xf'(x)}=\dfrac{2}{3}$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2\dfrac{f(x)}{e^x}\,dx=0$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-e$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$, $n>2$, pentru care $\int_2^n\dfrac{x}{f(x)\cdot f(-x)}\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{8}$.

IUNIE 2022– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^5+5x^4-10x^3+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=10x^2\left(x^2+2x-3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $2x^5+5x^4-10x^3+3\ge 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+\dfrac{2}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)dx=12$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-6x\right)dx=2\ln 2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot\ln^2 x\,dx=\dfrac{a\left(e^2-1\right)}{2}$.

MAI 2022– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^4+2$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=2$.

**5p** **c)** Demonstrați că $-32\le 2x^3-3x^4\le\dfrac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_2^3\left(f(x)-3e^x\right)dx=5$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-2x\right)dx=3$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, știind că $\int_0^1\dfrac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}dx=a\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$.

**MARTIE 2022– T.**

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{x^2}+\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\ln\frac{x}{3}\geq\frac{2}{3}-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{e^x}{2}+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{e^x}{2}\right)dx=4$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 2x\left(f(x)-1\right)dx=\frac{5}{3}$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_{-1}^0\left(f(x)-x\right)\cdot f(x)\,dx=\frac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$.

**MODEL 2022– T.**

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=x\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=0$.

**5p** **c)** Arătați că $f(x)\leq f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x+4}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2(x+4)f(x)\,dx=6$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^4\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=4\ln2$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este convexă.

AUGUST 2021– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{(3x+1)^2}$, $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că funcția $f$ este concavă.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x-1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)-\ln x+1\right)dx=21$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_2^4\frac{x}{f(x)-\ln x}dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

**5p** **c)** Determinați $a\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^a\frac{f(x)}{x^2}dx=\frac{a-\ln a}{a}$.

IUNIE 2021– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{x}+\ln x-5$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-4}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că **nu** există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2+3$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-e^x-3\right)dx=7$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\frac{5}{2}$.

**5p** **c)** Determinați $a\in(0,1)$, știind că $\int_0^a\frac{1}{f(x)-f'(x)}dx=\frac{1}{6}$.

IUNIE (R) 2021– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{2x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-8x}{\left(2x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\ln x\right)=0$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_1^2\left(f(x)-x^3-1\right)dx=9$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{f(x)-6x}dx=\dfrac{1}{3}\ln 2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\dfrac{a^3}{5}$.

MARTIE 2021– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^4-2x+2$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+4x^3-2$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_1^3\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)dx=4$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_1^2\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\,dx=2\ln 2-\dfrac{3}{4}$.

**5p** **c)** Determinați cel mai mare număr natural nenul $n$ pentru care $\int\limits_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)dx\geq\dfrac{1}{2021}$.

MODEL 2021– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\frac{2-e}{2e}\le f(x)\le\frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

**2.** Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{5}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, știind că $\int_1^e\frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}dx=\frac{e^2+a}{4}$.

AUGUST 2020– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați imaginea funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{5}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f^2(x)-1\right)dx=2\ln\frac{5}{4}$.

**5p** **c)** Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva lui $f$ pentru care $F(0)=0$.

IULIE 2020– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\dfrac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=e^2-1$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_0^1\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx=1-\ln 2$.

**5p** **c)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$.

IUNIE 2020– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că funcţia $f$ este descrescătoare pe intervalul $(0,1]$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=-\dfrac{1}{6}$.

**5p** **b)** Determinaţi primitiva $F$ a funcţiei $f$ pentru care $F(0)=0$.

**5p** **c)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)dx=\ln\dfrac{5}{2}$.

MODEL 2020– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2-12\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+6}{x-3}=15$.

5p **c)** Demonstrați că $-13\le f(x)\le 19$, pentru orice $x\in[-2,2]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-x^5-1\right)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_{0}^{1}x^{2020}\left(f(x)-x-1\right)dx$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-x^5\right)$ este egal cu $\pi\left(2\ln 2+\dfrac{3}{2}\right)$.

AUGUST 2019– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^6+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5\left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right)}{\left(x^6+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției $f$.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{f(x)}{e^x}dx=-\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-2)e^x+2019$ este o primitivă a funcției $f$.

5p **c)** Calculați $\int\limits_{0}^{1}f^2(x)f'(x)dx$.

AUGUST (R) 2019– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(2-x)(2+x)}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_0^2 x(x+1)\left(f(x)+\dfrac{1}{x+2}\right)dx=2$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_0^1 x f(x)dx=\ln\dfrac{9}{8}$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $p$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\ln\left(p^2+\dfrac{1}{3}\right)$.

IULIE 2019– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $[0,+\infty)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\le 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+7}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx=11$.

**5p** **b)** Calculați $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{x+1}{f(x)}dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

MAI 2019– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7x^3-5x^2+x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\le\dfrac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+8x-2, & x\in(-\infty,0]\\ x-2, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 f(x)dx=-\dfrac{1}{2}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=0$ are aria egală cu $\dfrac{17}{3}$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3+\dfrac{x-3}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este convexă pe $[5,+\infty)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $x-3\le e^{x-4}$, pentru orice număr real $x$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2+4x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=5$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, pentru care $\int_1^a \dfrac{f(x)}{x}dx=13+\ln a$.

**SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $(-2,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

**5p** **a)** Determinați primitiva $F$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=0$.

**5p** **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\dfrac{97\pi}{10}$.

**5p** **c)** Determinați numărul $m\in(1,+\infty)$, știind că $\displaystyle\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\frac{1}{2}$.

AUGUST 2018– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=3x(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq -1$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-x, & x\in(-\infty,1]\\ 2+\frac{1}{x}\cdot\ln x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2$.

**5p** **b)** Arătaţi că funcţia $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul natural $n$ pentru care $\int_{0}^{2} f(x)dx=\frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}$.

IUNIE 2018– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $-e\leq f(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x)-1)dx=2$.

**5p** **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Calculaţi $\int_{1}^{e} f(x)\ln x\,dx$.

IUNIE (R) 2018– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(3-x)(x+1)}{\left(x^2+3\right)^2}, x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $-1\le f(x)+f(y)\le\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^x}+x$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx=0$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$.

**5p** **c)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

MAI 2018– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $1\le f(x)+f(y)\le 3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=9$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Arătați că $\displaystyle\int_2^4\frac{3}{f'(x)+12}dx=\frac{\pi}{8}$.

MARTIE 2018– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6-6x+10$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=0$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

5p **c)** Demonstrați că $f(0,9)+f(1,1)\geq 10$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 f(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}e^a$.

MODEL 2018– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f$ **nu** are puncte de inflexiune.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{e^x f(x)}$.

AUGUST 2017– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+4$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $0\le f(x)\le 8$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int\limits_0^1 (f(x)-5x)dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+2017$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{127\pi}{3}$.

IUNIE 2017– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x+2$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=3(x^2+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=3$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $-5\le f(x)\le 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int\limits_0^1 (f(x)+x)dx=1$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int\limits_0^1 (4x^3-f(x))e^x dx=1$.

**5p** **c)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=3$.

IUNIE (R) 2017– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+12$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{f(x)-x^4}=-\dfrac{1}{2}$.

**5p** **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x-4$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_1^2\left(f(x)-2x+4\right)dx=7$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=2017$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int\limits_1^a f(x)\,dx=a^3-2$.

MAI 2017– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=(x+1)(3x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=\dfrac{1}{3}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\geq-\dfrac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_0^1\left(f(x)-x^2-1\right)dx=\dfrac{1}{2}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+2017$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $n^2-\dfrac{7}{3}$.

MARTIE 2017– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia $f$ este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ şi $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^e \left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $F$ este o primitivă a funcţiei $f$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_1^e f(x)F(x)dx=\dfrac{e^2}{2}$.

MODEL 2017– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=6(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+2x\right)dx=\dfrac{2}{3}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 e^x\left(x^2-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ are aria egală cu $\dfrac{2}{3}$.

AUGUST 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+7$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-11}{x-2}=12$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}(f(x)-3x)\,dx=\dfrac{2}{3}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_{0}^{1}\left(f(x)-x^2\right)e^x\,dx=3$.

**5p** **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{3f(x)}{x}$.

AUGUST (R) 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-x^3$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3\left(1-x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{f(x)}=0$.

**5p** **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2+x-1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)+x^2-x+1\right)dx=0$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$.

IULIE 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+3x+2$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-9$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\le 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}(f(x)-2)\,dx=0$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_{0}^{1}e^x f(x)\,dx=2e-1$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, știind că $\int\limits_{0}^{a}f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{6-a}(f(x)-4)\,dx$.

IULIE (R) 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+3x}{x}=0$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\ge -2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_{0}^{1}(f(x)-x-1)\,dx=\frac{1}{5}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_{1}^{e}(f(x)-x^4-1)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

**5p** **c)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

MAI 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3x^2+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=3$.

**5p** **c)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției $f$ în care tangenta la graficul funcției $f$ este paralelă cu dreapta $y=4x+1$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x\right)dx=0$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3+1\right)dx=3e^2+1$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

MARTIE 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

**5p** **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\dfrac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1,2016]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2$.

**5p** **a)** Calculați $\int\limits_{0}^{2}\left(f(x)+3x^2-2\right)dx$.

**5p** **b)** Arătați că $\int\limits_{0}^{1}\left(f(x)-x^3+3x^2+x\right)e^x dx=2e-1$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int\limits_{1-a}^{1+a}f(x)dx=0$, pentru orice număr real $a$.

MODEL 2016– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $-16\le f(x)\le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^4+3x^2+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2-1\right)dx=1$.

**5p** **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

AUGUST 2015– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+4\right)dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, pentru care $\int_1^a\frac{f(x)+4}{x}dx=12$.

AUGUST (R) 2015– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x}$.

**5p** **c)** Arătați că $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_2^3\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=5$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2015$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x$.

IULIE 2015– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.

**5p** **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=2015$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$, $n>1$, știind că $\int\limits_1^n\dfrac{f(x)}{x^2}dx=9$.

**IULIE (R) 2015– T.**

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-2)dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F$ a funcției $f$ pentru care $F(3)=5$.

**5p** **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $3e-4$.

**MAI 2015– T.**

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $0\le f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^3 (f(x)-\sqrt{x})dx=\frac{26}{3}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2015$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-\sqrt{x})e^x$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.

MARTIE 2015– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$. |
| **5p** | **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-2,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| | **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2-x+1$. |
| **5p** | **a)** Calculați $\int_0^1 (f(x)+1)dx$. |
| **5p** | **b)** Arătați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul natural nenul $n$, știind că $\int_0^n F(x)dx=\frac{n^3}{3}$. |

MODEL 2015– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$. |
| **5p** | **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$. |
| | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x$. |
| **5p** | **a)** Calculați $\int_{-1}^1 x^5 dx$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x^5)e^x dx=1$. |
| **5p** | **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^3}$. |

AUGUST 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

**5p** **b)** Arătaţi că $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Arătaţi că funcţia $f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

**5p** **c)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei $f$ este funcţie crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

AUGUST (R) 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

**5p** **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_1^e\frac{1}{x}dx=1$.

**5p** **b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**5p** **c)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria mai mică strict decât 4.

IULIE 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

**5p** **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x\,dx=e-1$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Calculați $\int_0^1 F(x)\,dx$.

IULIE (R) 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.

**5p** **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$.

**5p** **b)** Arătați că $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx=2$.

**5p** **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x-1$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

MAI 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

**5p** **b)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+f(x)$ pentru orice număr real $x$.

**5p** **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=0$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_1^2 3x^2dx=7$.

**5p** **b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei $f$ pentru care $F(1)=2014$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul natural $n$, $n\geq 2$ ştiind că $\int_1^n \dfrac{f(x)}{x}dx=\dfrac{13}{2}$.

MARTIE 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+7$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-3$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)}$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 5$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x+x^2+2014$.

**5p** **a)** Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-e^x\right)dx$.

**5p** **b)** Arătaţi că funcţia $F$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**5p** **c)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)F(x)dx$.

MODEL 2014– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

**5p** **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $e^x\ge x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Calculați $\int_1^2 (3-f(x))dx$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=3$.

**5p** **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

AUGUST 2013– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^3$.

**5p** **a)** Verificați dacă $f'(x)=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^2}$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$.

**5p** **a)** Verificați dacă funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

AUGUST (R) 2013– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+10-\frac{11}{x}$.

**5p** **a)** Verificați dacă $f'(x)=\frac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Arătați că funcția $f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+9$.

**5p** **a)** Calculați $\int_1^2 f'(x)dx$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+9\ln 2$.

**5p** **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^2$ este egal cu $81\pi$.

IUNIE 2013– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-1$.

**5p** **a)** Arătați că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Verificați dacă dreapta de ecuație $y=\frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că funcția $f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Calculați $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

IUNIE (R) 2013– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.

**5p** **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

**5p** **a)** Calculați $\int_0^1 f'(x)dx$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x+1$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

MAI 2013– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Verificați dacă $f''(x)+f(x)=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Arătați că funcția $f$ are un punct de extrem.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Calculați $\int_4^5 xf(x)dx$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=5$ și $x=a$, este egală cu $\ln 3$.

MODEL 2013– T.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

**5p** **a)** Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

**5p** **a)** Verificați dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Calculați $\int_1^e x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a>1$, pentru care $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}$.