IUNIE 2023 –S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a & 2-2a\\ 1-a & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(0)\cdot(A(a)-A(0))=aI_2$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 2=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m<n$, pentru care $m\circ n=3$.

MAI 2023 – S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & a\\ -3a & 3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=5$.

5p **b)** Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+4$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 3=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=3x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $x\circ a=x+a$, pentru orice număr real x.

MARTIE 2023– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -1 & 1\\ 0 & x & 0\\ 1 & -1 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=8$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

MODEL 2023– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+(a+1)z=a \\ x+ay-z=4 \\ 2x-ay+4z=-4 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

AUGUST 2022– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)-B(0)=xA$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că matricea $C(a)=B(a)\cdot B(1)-B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(2x-1)(2y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=4$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=1$.

IUNIE 2022– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Arătați că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4(xy+1)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=3$.

5p **b)** Arătați că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\leq 4$.

MAI 2022– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=4$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 0=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

MARTIE 2022– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $2*5=8$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$.

MODEL 2022– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=3$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x-\sqrt{2})\circ(x+\sqrt{2})=x$.

5p **c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

AUGUST 2021– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. Pe mulțimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 0=2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

IUNIE 2021– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p **c)** Se consideră numerele naturale m și n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătați că $m=n=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+y^2+x+y$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq 4$.

MARTIE 2021– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*2021=2021$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

MODEL 2021– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-4 \\ 1-a & 3-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

AUGUST 2020– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.

5p **b)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $3*3=12$.

5p **b)** Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $(x^2+2x)*3=7$.

IULIE 2020– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $0*1=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că $x*(-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

IUNIE 2020– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=4$.

MODEL 2020– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ -b & a\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

AUGUST 2019– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n)=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x\circ x\le 9$.

5p **c)** Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

IULIE 2019– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=17$.

5p **b)** Demonstrați că $A(2019-a)+A(2019+a)=2A(2019)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y)=2A(-8)$.

2. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{4x+4y}{4+xy}$.

5p **a)** Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **b)** Determinați $x\in G$, pentru care $x*x=\dfrac{8}{5}$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

MAI 2019– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(M(-1))$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale m și n, știind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x*\dfrac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

MARTIE 2019– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

MODEL 2019– S.N.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+z=1 \\ 3x+(2a-1)y+z=1 \\ (a-3)x+ay+z=2a-1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 = y_0 z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

AUGUST 2018– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3&-2\\3&2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

IUNIE 2018– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-7$.

5p **b)** Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.

2. Se consideră polinomul $f=4X^3-6X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

MAI 2018– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\9b&a\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(3,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

MARTIE 2018– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.

5p **c)** Știind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinați numerele naturale m și n, $m<n$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+\hat{6}x+\hat{6}y+\hat{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=(x+\hat{6})(y+\hat{6})+\hat{1}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{Z}_7$.

5p **b)** Demonstrați că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Calculați $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}$.

MODEL 2018– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $B=A+I_3$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x^{2\log_3 y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 9=16$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=25$.

5p **c)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

AUGUST 2017– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-2))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+6x+6y+30$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(-2017)=2017\circ(-6)$.

IUNIE 2017– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2})=A(27)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+2$, atunci restul împărțirii lui f la $X+3$ este egal cu -1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

MAI 2017– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & x+1 & 1\\ 2 & x & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x, pentru care $A(x)+A(x+2)=2A(2)$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+X-1$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2x_3-1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

MARTIE 2017– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $A(1)-A(0)$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x))=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))\leq\det(A(x))$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4xy-4x-4y+5$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $N=2016\circ 2017$ este pătratul unui număr natural.

5p **c)** Determinați numerele naturale a și b pentru care $a\circ b=13$.

MODEL 2017– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(0))$.

5p **b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

AUGUST 2016– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x)=2A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=-1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

IULIE 2016– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

MAI 2016– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A(2^x)A(2^x)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

MARTIE 2016– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ x & 2x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(M(0))$.

5p **b)** Demonstrați că $2M(x)-M(-x)=M(3x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n,2n-1)$ și $B(n^2,2n^2-1)$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=6xy-2x-2y+1$.

5p **a)** Calculați $1\circ\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}$.

MODEL 2016– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(2A)=-28$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y, știind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\leq 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a\circ b=8$.

AUGUST 2015– S.N.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $32^x = 16\cdot 2^x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-5n+6=0$.
5p	**5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Arătați că $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2)+xA(3))=0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-xy-x-y-2$.
5p	**a)** Arătați că $(-1)*1=-1$.
5p	**b)** Arătați că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)*(2x-3)=5$.

IULIE 2015– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0)=2$.
5p	**b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

MAI 2015– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\left(B(x)+I_2\right)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **a)** Arătaţi că $(-7)*7=7$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\dots*2015$.

MARTIE 2015– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix}x & a & a\\ -a & x & a\\ -a & -a & x\end{pmatrix}$, unde x şi a sunt numere reale.

5p **a)** Calculaţi $\det\left(A(2,0)\right)$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x,a)+A(x,-a)=2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x şi a.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\left(A(x,-3)\right)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi numerele întregi a şi b, ştiind că $a\circ b=2$.

5p **c)** Calculaţi $(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2015$.

MODEL 2015– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det\left(A(3)\right)$.

5p **b)** Arătaţi că $A(-2015)+A(2015)=2A(0)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)\right)=x^2$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+aX$, unde $\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ şi $a\in\mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{3})=\hat{3}$.

5p **c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

AUGUST 2014– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det B$.

5p **b)** Arătaţi că $AB=BA$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-4(x+y-5)$.

5p **a)** Calculaţi $4*5$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\cdots*2014$.

IULIE 2014– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4(x+y-3)-xy$.

5p **a)** Calculaţi $2*4$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

MAI 2014– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că $\det(A(a))=1$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Calculaţi $1\circ 2$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=2$.

MARTIE 2014– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $D(1,0)$.

5p **b)** Arătați că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii $H=\{x^{10}\mid x\in\mathbb{Z}_6\}$.

MODEL 2014– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Verificați dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.

5p **c)** Determinați numărul matricelor $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ pentru care $X^2=A$, unde a și b sunt numere reale.

2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=-2$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=2$.

5p **c)** Pentru $a\neq 0$, determinați un polinom de grad trei, având coeficienții reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.

AUGUST 2013– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x))=0$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

IUNIE 2013– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $A^2-6A=I_2$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $B=A-6I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

5p **a)** Calculați $2*2$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=\sqrt{12}$.

5p **c)** Arătați că numărul $\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

MAI 2013– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Arătați că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, calculați $f(1)$.

5p **b)** Determinați numărul real m știind că restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

5p **c)** Pentru $m=4$, arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

MODEL 2013– S.N.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2n+1 & n & 1\\ 2n^2+1 & n^2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+ay+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ calculați $2011\circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=-1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x\circ 2^x=1$.