IUNIE 2023 –M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\frac{x+3}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\frac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx=\frac{e-2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=1$.

MAI 2023 –M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln(x^2+x+5)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x^3+8)f(x)dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 xf(x)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Calculați $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)$.

MARTIE 2023–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1-\ln\left(e^x+x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\le\frac{\pi}{2}$.

MODEL 2023–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\ge f(x)\ge f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

AUGUST 2022–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)dx=\dfrac{19}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_1^2 \dfrac{x^n}{f^2(x)}dx$. Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $I_{n+2}+4I_n=\dfrac{3}{n-1}$.

IUNIE 2022–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\dfrac{x}{e^x-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in(1,2]$, ecuația $f(x)=m$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^4 \dfrac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

MAI 2022–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-5x+10\right)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\dfrac{1}{e}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^2\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\int\limits_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\int\limits_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\dfrac{m}{2}-\dfrac{2}{e}$.

MARTIE 2022–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\dfrac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx=\dfrac{a-\sqrt{2}}{3}$.

MODEL 2022–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^{x}}=e^{-2}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\dfrac{f(x)}{e^{-x}}-1\right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_4^6\dfrac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

5p **b)** Demonstrați că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\int\limits_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

AUGUST 2021–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\dfrac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\int\limits_0^1 xG(x)dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$.

IUNIE 2021–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int\limits_1^2 g(x)dx=\ln\dfrac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int\limits_a^b f^n(x)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

MAI 2021–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x\left(2x^2-13\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\dfrac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale .

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_1^2\dfrac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int\limits_0^{\sqrt{3}} f(x)dx=\dfrac{\pi}{a}-\sqrt{3}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int\limits_{-1}^{1} x f(x)dx=0$.

MARTIE 2021–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}\right)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Arătați că, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, pentru orice primitivă F a funcției f.

MODEL 2021–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_a^b f^n(x)dx$. Demonstrați că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=+\infty$.

AUGUST 2020–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-3^x+2^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(0)=\ln 4$.

5p **b)** Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,\ln(16e))$ este situat pe această tangentă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2(x^2+3)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

IULIE 2020–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{31}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

IUNIE 2020–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1(x^3+1)f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

MODEL 2020–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ și punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$. Demonstrați că $b\ge c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1(x^2+4)f(x)dx=-\frac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\int_1^2 x^n f(x)dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}I_n=-\infty$.

AUGUST 2019–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+1}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h **nu** au niciun punct comun.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

IUNIE 2019–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

MAI 2019–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x+5)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=e$ și $x=a$ are aria egală cu $2a$.

MARTIE 2019–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_1^2\frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)\,dx$.

MODEL 2019–M.I.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2$.

5p **c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

AUGUST 2018–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa Oy.

5p **c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=9$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^4 f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $I_{n+1}\le 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

IUNIE 2018–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că punctul $A\left(\dfrac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\dfrac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

MAI 2018–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+x+1\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\dfrac{11}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

MARTIE 2018–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinați imaginea funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\leq (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\leq \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

MODEL 2018–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg} x+x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(\sqrt{x})\,dx=\frac{e-1}{e}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

AUGUST 2017–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x-x^2-2x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătați că $\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=9$.

5p **b)** Pentru $n=1$, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx=2e-1$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

IUNIE 2017–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,dx=\frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu n^2-n+1.

MAI 2017–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\dfrac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\frac{x+1}{\sqrt{x}}f(x)dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$.

MARTIE 2017–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

MODEL 2017–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{5}$.

AUGUST 2016–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\ldots+f'(n)\right)=-\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\sqrt{x}\,f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

IULIE 2016–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu e.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=0$.

MAI 2016–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)dx\right)=1$.

MARTIE 2016–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

MODEL 2016–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstraţi că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_1=\dfrac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

AUGUST 2015–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că derivata funcției f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\frac{1}{2015}$.

IULIE 2015–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x}f(x)dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

MAI 2015–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int\limits_0^1\left(f(x)+2x\right)dx=e-1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=e-3$.

5p **c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$, este egal cu $\dfrac{\pi}{6}\left(3e^2-19\right)$.

MARTIE 2015–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x),\ x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\ln(x+1)\le x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\int\limits_1^x f(t)dt$.

MODEL 2015–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{e^x-x}$.
5p	**a)** Calculați $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^2 f^2(x)dx$.
5p	**b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. Arătați că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

AUGUST 2014–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2},\ x\in(-2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că ecuația $f(x)=1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.
5p	**a)** Arătați că $I_1=1-\ln 2$.
5p	**b)** Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

IULIE 2014–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

MAI 2014–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\ge 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{1}{4}$.

MARTIE 2014–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

MODEL 2014–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\ldots-\frac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

AUGUST 2013–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+e^x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\geq\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int\limits_0^1 xe^{-nx^2}dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_0.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural n.
5p	**c)** Demonstraţi că $I_n=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

IUNIE 2013–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int\limits_0^1 x^n e^x dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_1.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Arătaţi că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

MAI 2013–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.

5p **b)** Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_1=e^2$.

5p **c)** Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.

MODEL 2013–M.I.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(0)$.

5p **b)** Arătaţi că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuaţia $f(x)=n$ are exact o soluţie în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluţie din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuaţiei $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătaţi că $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ şi se notează cu S suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculaţi aria suprafeţei *S*.

5p **b)** Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei S în jurul axei *Ox*.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.