IUNIE 2023 –S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $|f(x)-f(y)|\le 1$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-4\ln x)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e x(f(x)-3x^2)dx=e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.

MAI 2023 – S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+2x-2)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x^2+4x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x+4}(x^2+2x-2)\le 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

MARTIE 2023– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Arătați că $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\frac{\ln 5}{3}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

MODEL 2023– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)-x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 3\left(f(x)-x\ln x\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x^3}dx=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.

AUGUST 2022– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.

5p **c)** Demonstrați că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-2x)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\dfrac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.

5p **c)** Determinați $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1\dfrac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\dfrac{2}{9}$.

IUNIE 2022– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4}=2$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(e^x+2x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4\dfrac{f(x)}{e^x+2x^2}dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2x^3\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2\dfrac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\dfrac{e^4-e}{2}+a$.

MAI 2022– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\geq 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+4}{6x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\left(6x^2+1\right)dx=10$.

MARTIE 2022– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6\left(1-x^2\right)}{\sqrt{x}\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\dfrac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0)=0$.

MODEL 2022– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(n,f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}x+1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

AUGUST 2021– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x)\,dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

IUNIE 2021– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3(x^2+1)f(x)dx=18$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)dx=4+\ln5$.

5p **c)** Demonstraţi că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

MARTIE 2021– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $\sqrt{2}\leq\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\leq\sqrt{6}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3-2\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^3(f(x)+2\ln x)dx=14$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^e(2x+3-f(x))dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2f(x^3+1)dx=\frac{4(2-\ln2)}{3}$.

MODEL 2021– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\le(x-1)^2$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\pi$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\dfrac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$.

AUGUST 2020– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1},\ x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R},\ g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\le x_2$, atunci $g(x_1)\ge g(x_2)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x^3$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\dfrac{1}{12}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.

IULIE 2020– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.

5p **c)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\int_0^1 F(x)dx=\frac{5-3e}{3}$.

IUNIE 2020– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

MODEL 2020– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x-10$.

5p **a)** Arătați că $f'(0)=0$.

5p **b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty),\ f(x)=x+\frac{9}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

AUGUST 2019– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln x^e$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-e}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)(x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=6$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>2$, știind că $\int_2^a\frac{2xe^x}{f(x)}dx=3\ln 2$.

IULIE 2019– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x+2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln(1+\cos x)\le\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx=6$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu $4-6e^{-n}$.

MAI 2019– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $0\le(x+3)(y+3)\le 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{0}^{2}(x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.

MARTIE 2019– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\ln x-x^2-3x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $5\ln x\le x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$.

5p **a)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-x^2e^x-5e^x\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{e^2-1}{e^3}\le\int_{-3}^{-1}f(x)dx\le\dfrac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$.

MODEL 2019– S.N.

SUBIECTUL al III-lea — Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)dx=12$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

AUGUST 2018– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\frac{xf(x)}{e^x}dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

IUNIE 2018– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)dx=22$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

MAI 2018– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\le\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}dt}{x^2}$.

MARTIE 2018– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)dx=\frac{7}{3}$.

MODEL 2018– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x-2}-x+1\geq 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)dx=1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

AUGUST 2017– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{2}{x}+\ln x\geq 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 2x f(x)dx=\dfrac{13}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(1)=1$.

5p **c)** Demonstrați că $2\int_1^n \left(f(x)+xf'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

IUNIE 2017– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2017}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(1)=\frac{\pi}{4}+1$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n x f(x)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

MAI 2017– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+1}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-2x)dx=e-1$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a x f(x)dx=1+\frac{2a^3}{3}$.

MARTIE 2017– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $1+2ef(x)\geq 0$, pentru orice număr real x, $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx\leq -\frac{1}{20}$.

MODEL 2017– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=0$.

AUGUST 2016– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(e)<\dfrac{7}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x)dx=e(e-1)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

IULIE 2016– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=0$.

MAI 2016– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \dfrac{1}{e^x}f(x)\,dx=\dfrac{5}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

MARTIE 2016– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{4}\le f(x)\le\dfrac{1}{4}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.

5p **a)** Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

MODEL 2016– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f'(x)\geq -1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=3$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π.

AUGUST 2015– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x f(x)dx=\dfrac{7}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu 1.

IULIE 2015– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$.

5p **c)** Arătați că $\int\limits_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\leq\dfrac{1}{4}$.

MAI 2015– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^1\dfrac{1}{f(x)}dx=\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int\limits_0^1 x^2 f(x)dx=-\dfrac{1}{2}+\ln 2$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

MARTIE 2015– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(-1)=1$.

5p **c)** Arătaţi că pentru orice număr real nenul a are loc relaţia $\int_0^a f(x)dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)dx=a^4-1$.

MODEL 2015– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=1$, are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$.

AUGUST 2014– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\frac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\frac{3e^4+1}{16}$.

5p **c)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

IULIE 2014– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+15}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{1}{144}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$ știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$, are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

MAI 2014– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x-2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\le -\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_1^2 (x+1)f(x)\,dx = 2\ln 2 - 1$.

5p **b)** Arătați că $\int\limits_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx = 1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\ln x}{f(x)}$.

MARTIE 2014– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\ge 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int\limits_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx$.

5p **c)** Arătați că $F(e-1)=\dfrac{e^2-4e+7}{2}$, unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=1$.

MODEL 2014– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătaţi că funcţia f este descrescătoare.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_0^1 (x+2)f(x)dx$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_{2013}^{2014}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=1$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$.

AUGUST 2013– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_2^3\frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(1)=-1$.
5p	**c)** Arătaţi că $\int_2^e\frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

IUNIE 2013– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Verificați dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\int_0^1 x^3 f(x)\,dx=\dfrac{1}{4}$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

MAI 2013– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x f'(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

MODEL 2013– S.N.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012}.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\frac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.